Varianta 25

Subiectul I

a) $AB = 10$.
b) $S_{ABC} = 18$.
c) $E = 2$.
d) $\cos^2 x = \frac{16}{25}$.
e) $S = 24$.
f) $a = -4$.

Subiectul II

1.
a) $\bar{z} = 4$.
b) $C_7^6 = 7$.
c) $x \in \{-2, 2\}$.
d) $x = 3$.
e) $x = -4$.

2.
a) $f'(x) = 1 + 2^x \ln 2$.
b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + 2\ln 2$.
c) Din $f'(x) = 1 + 2^x \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
e) $\int_1^2 3x^2 dx = 7$.

Subiectul III

a) $\det(A(x)) = 1$.
b) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
c) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(0) \in G$.
d) $A(x) \cdot A(-x) \overset{b)}{=} A(x + (-x)) = A(0) = I_2$.

e) Din punctual **b)** rezultă că mulțimea G este stabilă față de înmulțirea matricelor şi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y), \forall x,y\in \mathbf{R}$; înmulțirea matricelor de ordinul doi este asociativă; $I_2\in G$ şi $A(x)\cdot I_2=I_2\cdot A(x)=A(x), \forall x\in \mathbf{R}$, deci I_2 este elementul neutru; Din punctual **d)**, deducem că $\forall x\in \mathbf{R}$, $A(x)$ este inversabilă şi inversa este $A(-x)\in G, \left(-x\in \mathbf{R}, \forall x\in \mathbf{R}\right)$. În concluzie mulțimea G împreună cu operația de înmulțirea a matricelor formează structura de grup comutativ.

f) Pentru $n=1$, evident $(A(1))^1=A(1)$. Presupunem adevărat că $(A(1))^k=A(k)$, $k\in \mathbf{N}^*$ şi demonstrăm că $(A(1))^{k+1}=A(k+1)$.

Dar $(A(1))^{k+1}=(A(1))^k\cdot A(1)=A(k)\cdot A(1)\overset{b)}{=}A(k+1)$, deci $(A(1))^n=A(n), \forall n\in \mathbf{N}^*$.

g) $A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2007)\overset{b)}{=}A(1+2+\ldots+2007)=A(1004\cdot 2007)$, deci $t=1004\cdot 2007=2015028$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2}, x\in \mathbf{R}$.

b) $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2}\le 0, \forall x\in [1,\infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) $f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x^2+2}=1 \Rightarrow (x-1)^2=0$, deci $x=1$.

d) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le f(x) \\ f(x)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-2\le 4x+2 \\ 2x+1\le x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4\ge 0 \\ x^2-2x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2\ge 0 \\ (x-1)^2\ge 0 \end{cases}$, adevărat

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+2}=0$, deci ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f este $y=0$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2+2}=2$.

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2}dx=\ln(x^2+2)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.